1. YANG-BAXTER関係式(I. ソリトンの数理的問題,ソリトン系のダイナミックスとそれに関するカオスの問題,基研長期研究会報告)

AUTHOR(S):

阿久津, 泰弘

CITATION:

阿久津, 泰弘. 1. YANG-BAXTER関係式(I. ソリトンの数理的問題,ソリトン系のダイナミックスとそれに関するカオスの問題,基研長期研究会報告). 物性研究 1983, 40(1): 34-42

ISSUE DATE:

1983-04-20

URL:

http://hdl.handle.net/2433/90902

Ⅳ. 量子論と統計力学

● Ⅳ. 1.	十河　清（東大・教養物理）	相関関数の理論
Ⅳ. 2.	飛田　和男（北大・工）	Bethe ansatz とソリトン
Ⅳ. 3.	石川　正勝（道都短大）	Massive-Thirring － 量子 sine-Gordon系の有限温度励起とスペクトル
Ⅳ. 4.	後藤　喬雄（京大・教養物理）	核磁気緩和による磁気的ソリトンの検証

Ⅴ. 物性におけるソリトン

● Ⅴ. 1.	右衛門佐重雄（名大・理）	生体系におけるソリトン
Ⅴ. 2.	石井　晃（早大・理工）	物性における Kubo-Namiki-Ohba 型ソリトン
● Ⅴ. 3.	川上　則雄（阪大・工） 興地　斐男（阪大・工）	Anderson model の厳密解
● Ⅴ. 4.	太田　隆生（九大・理）	Dynamics of Interface
Ⅴ. 4′	川崎　恭治（九大・理）	一次元的系での Kink 集団の Kinetics（コメント）
Ⅴ. 5.	本間　重雄（名大・工）	結晶成長の理論
Ⅴ. 6.	甲斐　昌一（九工大） 今崎　正秀（九工大）	化学反応を伴なった界面に生ずるソリトン状運動

YANG-BAXTER 関係式

東大・教養　阿久津　泰　弘

Ⅰ. Introduction

近年，量子完全積分系の研究は大きく進展した。[1~4] その過程で一見異なった方法・分野の共通性が認識されてきた。多くの「解ける」モデル・問題が共通・類似の構造をもち，互いに深く関連していることが明らかになった。その構造の基盤となるのが Yang-Baxter 関係式（YBR）と呼ばれるものである。この名称は，Bethe 仮説に関する Yang の仕事[5] と eight-vertex model の厳密解に関する Baxter の仕事[6] に由来する。前者に於ては Bethe 仮説の適用可能条件式（S 行列の因子化条件式），後者に於ては transfer matrix が交換するための条件式として現われたが，両者が実は本質的には同等であったというわけである。YBR及びそれに類似の関係式（広義の YBR）は次の 4 つの場合に登場する：①因子化された S 行列の理

論 ②量子逆散乱法 ③ 2次元 vertex model ④ 2次元 IRF model 。①,②は1＋1次元の場の理論の問題，③,④は統計力学の問題である。これらの問題は互いに同値であることも多いが，一方それぞれに独自な面ももっている。本稿ではYBRを軸に，（広い意味での）量子完全積分系に関する研究のreviewを行なうとともに，現状における問題点・今後の課題についても触れてみたい。

Ⅱ. 因子化されたS行列（factorized S-matrix）の理論

S行列が因子化されるとは，一般のN体のS行列が2本のS行列の積になることをいう。この事実は，Bethe仮説で解ける系（e.g. 1次元 δ−関数 bose gas[7]）では知られていたが，Yang[5]はBethe仮説が適用できるための条件式として，S行列が満たすべき関係式（後に述べる因子化方程式と同等）を与えた。最近ではモデルの具体形（Lagrangianの形など）から離れて，（因子化する）S行列のみを問題にする立場・理論があり，[8] 本章ではそれについて述べる。なお，今のところ完全積分性とS行列の因子化の同値性に対する一般的証明はない。

1. S行列の因子化

1＋1次元における因子化されたN体散乱を考える（Fig. 1）。各 θ_i は i 番目の粒子のrapidityである。一般にin-state，out-stateは $\{\theta_i\}$ のみで決まるから，S行列は中間状態での散乱の順序に依ってはならない。このことを$N=3$の場合に図示するとFig.2のようになる。今，多成分の系を考え，$(i,j)\to(k,l)$ のprocessに対する2本のS行列を $S_{ij}^{kl}(\theta)$（θはin-stateのrapidity difference）とする。Fig. 2に相当する式は，

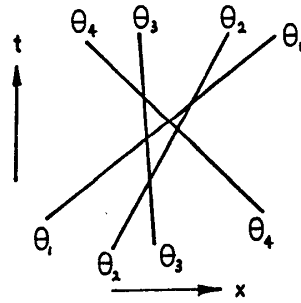


Fig. 1

$$S_{ij}^{pq}(\theta_{12})\,S_{pk}^{lr}(\theta_{13})\,S_{qr}^{mn}(\theta_{23})$$
$$= S_{jk}^{pq}(\theta_{23})\,S_{iq}^{rn}(\theta_{13})\,S_{rp}^{lm}(\theta_{12}), \tag{1}$$

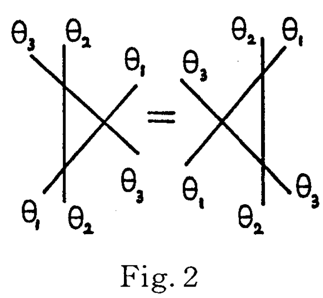


Fig. 2

ただし $\theta_{ij}=\theta_i-\theta_j$，くり返した添字は和をとるものとする。(1)式は因子化方程式（factorization equation）と呼ばれYBRの一つである。

2. Zamolodchikov代数

次のような交換関係をもつ代数 $\{A_i(\theta)\}_{i,\theta}$ を考える（S_{ij}^{kl} は1で導入したS行列）：

$$A_i(\theta_1)\,A_j(\theta_2)=\sum_{kl} S_{ij}^{kl}(\theta_{12})\,A_l(\theta_2)\,A_k(\theta_1) \tag{2}$$

この代数は，Zamolodchikovの（symbolic）代数と呼ばれ，$A_i(\theta)$はrapidity θをもち，i と

いう「color」をもつ粒子の生成作用素と解釈される。因子化方程式はこの代表の結合則の表現に他ならない：$(A_i(\theta_1)A_j(\theta_2))A_k(\theta_3)=A_i(\theta_1)(A_j(\theta_2)A_k(\theta_3))$。$A_i(\theta)$は単に形式的なものともみなし得るが，次章に述べる量子逆散乱法により，具体的に構成できる場合もある。

3. 因子化方程式の解法・解

S 行列には因子化条件の他に，次のような条件が要求される：

① ユニタリー性

② 解析性（meromorphic）

③ 対称性（内部対称性，C・P・T 不変性，交差対称性）

④ 初期条件：通常は $S_{ij}^{kl}(\theta=0)=\delta_{il}\delta_{jk}$。

実際に解くには微分方程式に変換する。また，いわゆるCDD－不定性があるため minimal な解（最少特異性解）が問題にされる。

4. 現在までに得られている解

種々の内部対称性をもつ解が得られている：O(N),[8),9),10)] U(N),[11)] Z_4,[12,13)] GL(2, **C**)[14)], Z_N,[15,16)] S_N[17)] など。

Ⅲ. 量子逆散乱法（Quantum Inverse Scattering Method）

量子逆散乱法（QISM）には，Thacker 達流のもの[2,18)]と Faddeev 達流[1,19,20)]のものがあるが，前者は連続系を直接扱うのに対して後者は一旦離散化して扱う。また，前者は実空間の量（波動関数）を扱うのに適するが後者は代数関係を扱うのに適している。本章では後者について述べる。

1. Transition matrix（Jost matrix, Monodromy matrix）

$L_n(\lambda)$を離散系（若しくは離散近似した系）の量子的Lax-Moser pair（の片われ）とする（λは spectral parameter）。Transition matrix $T_N(\lambda)$は次式で定義される。

$$T_N(\lambda)=L_N(\lambda)\,L_{N-1}(\lambda)\cdots\cdots\cdots L_1(\lambda)\equiv\overleftarrow{\prod_n}L_n(\lambda), \tag{3}$$

ここでNは1次元格子の格子点の数である。QISMにおいては$T_N(\lambda)$の要素間の交換関係が重要であるが，これは $L_n(\lambda)$（局所的な量）の満たす次の関係式から直接得られる：

$$R(\lambda,\mu)\left[L_n(\lambda)\otimes L_n(\mu)\right]=\left[L_n(\mu)\otimes L_n(\lambda)\right]R(\lambda,\mu), \tag{4}$$

ここで $R(\lambda,\mu)$は非特異C数行列で，これから

$$R(\lambda,\mu)\left[T_N(\lambda)\otimes T_N(\mu)\right]=\left[T_N(\mu)\otimes T_N(\lambda)\right]R(\lambda,\mu), \tag{5}$$

が帰結される。(4)式はYBRの一つである。

2. 代数化されたBethe仮説法

技術的詳細を略し大筋を述べる。L_nが2行2列の場合(non-linear Schrödinger, Sine-Gordonなど)を考えると$T_N(\lambda)$は次の形をもつ：

$$T_N(\lambda)=\begin{pmatrix} A_N(\lambda) & B_N(\lambda) \\ B_N(\lambda) & D_N(\lambda) \end{pmatrix}。 \tag{6}$$

(5)式から得られる交換関係によりA_N+D_N ($=\mathrm{T_r}\,T_N$)は保存量，B_Nは生成演算子の役割をもつことがわかる。A_N+D_N(よってそのλー微分から得られるHamiltonianなど)のspectrumを求めるのに，$\{B_N(\lambda_1)\cdots B_N(\lambda_n)\,|\,0>\}_{\{\lambda\},n}$を基底にとり，交換関係のみを用いて純粋に代数的にBethe仮説法を実行することができる。

3. 量子的Gel'fand-Levitan方程式

古典系でそうであったように，量子系でもはじめの場をT_Nの要素(散乱データ)で表現することができる(量子的Gel'fand-Levitan方程式を介して)。これにより，相関関数の閉じた表式を得る道が開けた。本号の十河氏の解説を参照されたい。

4. 今までにQISMで扱われているモデル

non-linear Schrödinger,[1,18,19] Sine-Gordon,[20] Toda-chain,[1] XYZ-chain,[21,22] non-linear Schrödinger, Sine-Gordonのexact lattice version。[23] 量子的Gel'fand-Levitan方程式。[24~29]

Ⅳ. 2次元vertex modelの統計力学

1. commuting transfer matrices

Baxterによるeight-vertex modelの厳密解に於て鍵となるのは「互いに交換するtransfer matrixの族(a family of commuting transfer matrices)」という概念であった。今，問題を一般化して各vertexの足がとり得る状態数をq (≥ 2)としよう。

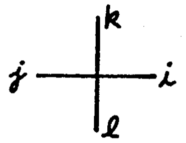


Fig.3

Fig.3のような(site nにおける)vertexに対するBoltzmann weightを$(L_n)_{ij}(k,\ell)$とおき，L_nを$q\times q$の行列を要素とする$q\times q$の行列(ijがblock index, $k\ell$はblock内index)とみなす。また，weightはspectral parameter λによってparametrizeされているとし，$L_n=L_n(\lambda)$とする。Transfer matrix $T_N(\lambda)$は次式で与えられる：

$$T_N(\lambda) = \mathrm{Tr}\,L_N(\lambda)\,L_{N-1}(\lambda)\cdots\cdots L_1(\lambda), \tag{7}$$

ここでNは格子の構方向の大きさで，境界条件は周期的とする。1 siteあたりのfree energy f は，$\Lambda_{\max}^{(N)}$ を $T_N(\lambda)$ の最大固有値として $-\beta f=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln\Lambda_{\max}^{(N)}$ として得られる。Baxterは次の条件式から出発して $\Lambda_{\max}^{(N)}$ を求めた：

$$[T(\lambda),T(\mu)]=0 \quad (\forall\lambda,\mu) \tag{8}$$

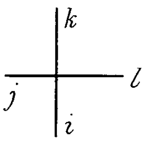
(8)式が成立するには次式が成立すれば充分：

$$R(\lambda,\mu)\,[L_n(\lambda)\otimes L_n(\mu)]=[L_n(\mu)\otimes L_n(\lambda)]\,\mathrm{R}(\lambda,\mu), \tag{9}$$

ここで $R(\lambda,\mu)$ は $q\times q$ の非特異行列である。(9)式はYBRの名称のいわれとなる関係式である。一見してわかるように，(9)式は前章の(4)式と全く同じであるから，vertex modelはQISM風に解くことができる。[30]

2. 因子化された S 行列との関係

Zamolodchikov[12]は次のことを指摘した：「全ての因子化 S 行列は対応するvertex modelをもち，因子化方程式(1)はtransfer matrixの交換条件(9)に同値である」。具体的な対応関係は，

$S_{ij}^{kl}=$ 

またrapidityが自然なspectral parameterとなる。この対応により，解けるvertex modelをみつける手段として因子化 S 行列の理論が用いられている。最近次々に得られている解けるvertex modelは，ほとんどこの手段によっている。しかし一方で，因子化 S 行列では再現されない，解けるvertex modelもある：例えば，一般の非対称weightをもつsix-vertex model。[31, 32] それでもなおこの系に対するYBR(9)は存在する。[33]

3. 1次元量子spin系との関係

Baxterの公式[34]：

$$H=-\mathrm{d}\ln T(\lambda)/\mathrm{d}\lambda\,\big|_{\lambda=\lambda_0} \tag{10}$$

により，2次元vertex modelのtransfer matrixと1次元量子spin系のHamiltonianが対応する(λ_0 は $(L(\lambda=\lambda_0))_{ij}(\alpha\beta)\propto\delta_{i\beta}\,\delta_{j\alpha}$ となる点)。

4. 現在までに得られている解

ここでいう「解」とはYBRの解を指す。YBRの解が得られても，free energyまでは求められていない場合が多い。

eight-vertex,[6] 81-vertex,[35] 19-vertex,[36] 21-vertex[37], general q-state,[38,39] 縦・横の state 数が異なるもの,[14,22] 2-state model の classification[33] など。

V. 2次元 IRF model の統計力学

1. IRF (Interaction-Round-a-Face) model[40]

IRF model とは，2次元正方格子の各格子点上の spin (一般に q state, $q \geq 2$) が，face 毎に相互作用しているものを言う。Fig.4 の face configurationに対する Boltzmann weight を $W(abcd)$ とおく。Transfer matrix Vは次式で定義される：$V(\sigma_1 \cdots \sigma_N \mid \sigma_1' \cdots \sigma_N') = \prod_{j=1}^{N} W(\sigma_j \, \sigma_{j+1} \, \sigma_{j+1}' \, \sigma_j')$。一般化された star-triangle relation[40] と呼ばれる次の関係式

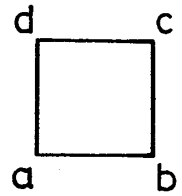


Fig. 4

$$\sum_g W(bcga) W'(agef) W''(degc)$$
$$= \sum_g W''(gfab) W'(bcdg) W(gdef) \qquad (11)$$

が成立すると $[V, V'] = 0$ が言える (V'は weight W'に対する transfer matrix)。(11)はYBRの一種である。

2. vertex model との対応

Wu,[41] Kadanoff-Wegner[42] は，eight-vertex model と4体相互作用をもつ Ising model (IRF model である) との等価性を示した。同様の対応関係は一般の q −state modelに拡張できて，Fig.5 のようになる (● が IRF spin site)。この対応により，spin の一斉 shift に関して weight が不変 (Z_N −不変性) なIRF model は vertex model と等価 (YBRが同型になり，free energyが等しい) となる。vertex model に変換できる例としては，上記の他に，Potts model,[43] Ashkin-Teller model[44] (ただし両者とも解けない) などがある。変換できない例としては，磁場あり Ising model (解けない)，hard hexagon[40,45] (解ける) など。

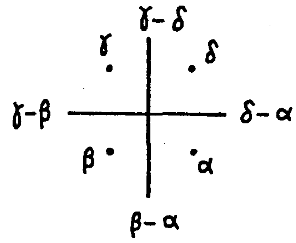


Fig. 5

3. 現在までに解かれているモデル

上述の他に，注目すべきものとして U(1) model,[46] Zn model[47] がある。この U(1) model は，Plane rotator 的な spin 自由度をもつモデルで，さらに dual 変換したものは，roughening transition に対する SOS (Solid-On-Solid) model に非常に近いものとなっている。

VI. 現状における問題点・今後の課題

① Fermion 系に対するQISM。Fermion 系には，物理的応用上重要なものが多い (例えば Hubbard model，Anderson model etc) にもかかわらず，QISM はほとんどできていな

い。

② 代数化されたBethe仮説法の完成。state数≧3のvertex modelで，$L_n(\lambda)|0>$が(|0>をどうとっても)上三角(下は下3角)にならない場合がある(local vacuumが存在しない)。このときは従来のままのFaddeev formalismは適用できないので，何らかの拡張が必要である。

③ 因子化S行列から，それを与えるモデル(Hamiltonianなど)を構成する一般的方法。個別的には，ref 13のような例(non-relativistic Z_4に相当する粒子系)はある。

④ classical YBR[4)]。

⑤ tetrahedron equation。2＋1次元の「string」の因子化S行列理論[49)]や3次元統計力学のモデルのcommuting transfer matrix[50,51)]に関連するYBRの高次元版。

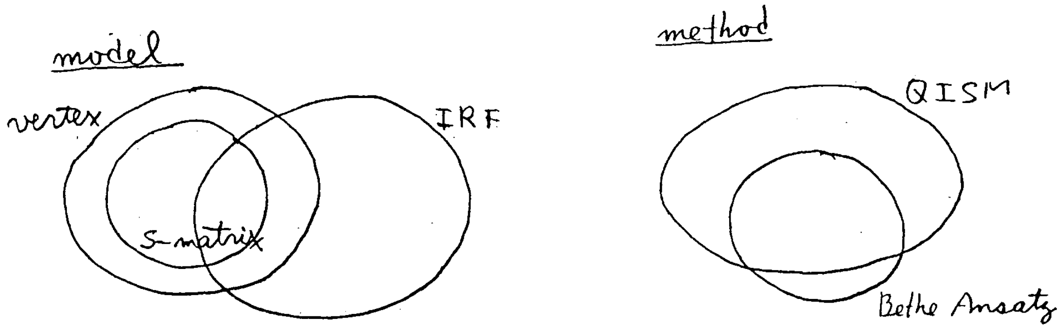
⑥ 多成分・多状態の解けるモデルをみつける。[52)]

⑦ 量子的Gel'fand-Levitan法の完成

⑧ 「解けない」モデルへの応用。Perturbationの出発点としての「解ける」モデルの役割があり得る。もちろん，量子完全積分性の「安定性」の議論も必要(「KAMの定理」に相当するもの)。

以上，思いつくまま挙げてみたが，多少現状では無理な問題もあるかも知れない。

最後に，本稿で述べた事柄の相互関係を模式的に表わしてみると次のようになる：



References

1) L. D. Faddeev, Soviet Scientific Reviews Math. Phys **C1** (1981) 107.

2) H. B. Thacker, Rev. Mod. Phys. **53** (1981) 253.

3) 和達三樹，日本物理学会誌 36 (1981) 786.

4) P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, in *Lecture Notes in Physics* 151 (Springer, 1982) p. 61.

5) C. N. Yang, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1312.

6) R. J. Baxter, Ann. Phys. **70** (1972) 193.

7) E. Lieb and W. Liniger, Phys. Rev. **130** (1963) 1605.

8) M. Karowski, H. -J. Thun, T. T. Truong and P. H. Weisz, Phys. Lett. **67B** (1977) 321.

9) A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. **B133** (1978) 525.

10) A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, Ann. Phys. **120** (1979) 253.

11) B. Berg, M. Karowski, V. Kurak and P. H. Weisz, Nucl. Phys. **B134** (1978) 125.

12) A. B. Zamolodchikov, Comm. Math. Phys. **69** (1979) 165.

13) K. Sogo, M. Uchinami, A. Nakamura and M. Wadati, Prog. Theor. Phys. **66** (1981) 1284.

14) P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin and E. K. Sklyanin, Lett. Math. Phys. **5** (1981) 393.

15) A. A. Belavin, Nucl. Phys. **B180** [FS2] (1981) 189.

16) A. Bovier, preprint.

17) V. V. Bazhanov and Yu. G. Stroganov.

18) H. B. Thacker and D. Wilkinson, Phys. Rev. **D19** (1979) 3660.

19) E. K. Sklyanin, Doklad. Acad. Nauk. SSSR. **244** (1979) 1337.

20) E. K. Sklyanin, L. A. Takhtadzhan and L. D. Faddeev, Theor. Math. Phys. **40** (1980) 688.

21) L. A. Takhtadzhan and L. D. Faddeev, Russian Math. Surveys **34** (1979) 11.

22) K. Sogo and M. Wadati, Prog. Theor. Phys. **68** (1982) 85.

23) V. E. Korepin and A. G. Izergin, preprint.

24) D. B. Creamer, H. B. Thacker and D. Wilkinson, Phys. Rev. **D21** (1980) 1523.

25)

26) M. Göckeler, Z. Phys. **C11** (1981) 125.

27) P. P. Kulish and F. A. Smirnov, Phys. Lett **90A** (1982) 74.

28) M. Imada, Prog. Theor. Phys. **68** (1982) 527.

29) K. Sogo and M. Wadati, Prog. Theor. Phys. **69** (1983) in press.

30) H. B. Thacker, J. Math. Phys. **21** (1980) 1115.

31) C. P. Yang, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 586.

32) B. Sutherland, C. P. Yang and C. N. Yang, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 588.

33) K. Sogo, M. Uchinami, Y. Akutsu and M. Wadati, Prog. Theor. Phys. **68** (1982) 508.

34) R. J. Baxter, Ann. Phys. **70** (1972) 323.

35) Yu. G. Stroganov, Phys. Lett. **74A** (1979) 116.

36) A. B. Zamolodchikov and V. A. Fateev, Sov. J. Nucl. Phys. **32** (1980) 298.

37) V. A. Fateev, Sov. J. Nucl. Phys. **33** (1981) 761.

38) C. L. Schultz, Phys. Rev. Lett. **46** (1981) 6291.

39) J. H. H. Perk and C. L. Schultz, preprint.
40) R. J. Baxter, in *Fundamental Problems in Statistical Mechanics V*, E. G. D. Cohen ed. (North-Holland, 1980) p. 109.
41) F. Y. Wu, Phys. Rev. **B4** (1971) 2312.
42) L. P. Kadanoff and F. J. Wegner, Phys. Rev. **B4** (1971) 3989.
43) R. B. Potts, Proc. Camb. Phil. Soc. **48** (1952) 106.
44) J. Ashkin and E. Teller, Phys. Rev. **64** (1943) 178.
45) R. J. Baxter, J. Phys. **A13** (1980) L61.
46) V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov, Phys. Lett. **92A** (1982) 35.
47) V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov, Phys. Lett. **92A** (1981) 37.
48) 例えば，J. D. Weeks, in *Ordering in Strongly Fluctuating Condensed Matter Systems*, T. Riste ed. (Plenum, 1980) p. 293.
49) A. B. Zamolodchikov, Comm. Math. Phys. **79** (1981) 489.
50) V. V. Bazhanov and Yu. G. Stroganov, preprint.
51) M. T. Jaekel and J. M. Maillard, J. Phys. **A15** (1982) 1309.
52) K. Sogo and Y. Akutsu, preprint.

アインシュタイン方程式のベックルント変換

筑波大物理　表　實

相対論的な重力場の方程式（Einstein 方程式）は次式で与えられる

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=k\,T^{\mu\nu}。$$

ここで $R^{\mu\nu}$, R は計量テンソル $g_{\mu\nu}$（$ds^2=g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu$）の２階微分までを含む曲率テンソル。$T^{\mu\nu}$ は物質のエネルギー・運動量テンソルであり，又 κ（$=\frac{8\pi}{c^4}G=2.07\times10^{-48}$ s/g cm）はアインシュタイン定数と呼ばれる。この式を孤立した物体がその外部に作る重力場に適用したときに得られる解（外部解）を厳密に求める方法の一つについて報告する。

外部解を求めるためには，いろいろな対称性（例；球対称解＝Schwarzshild の解）が要請されてきたが，ここではいままで使われた要請をその特別な場合として含むところの定常か